Análisis no lineal - Práctica 1 (segunda parte)

1 Teorema de Brouwer - Shooting 2-dimensional

1. Probar la equivalencia entre las distintas versiones del teorema de Brouwer vistas en el apunte. Otra versión: Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es continua y existe C tal que $\|f(x) - x\| \leq C$ para todo x, entonces f tiene al menos un cero.

2. Probar que el axioma de completitud de los números reales puede ser reemplazado por cualquiera de los enunciados del problema anterior. Más aún, puede suponerse que todas los funciones involucradas son de clase C^2.

3. Usar el índice de una curva para demostrar en forma directa cada uno de los enunciados del problema 1.

4. (*Condición de Hartman*) Sea $f : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de clase C^1 tal que existe una constante positiva R tal que

$$f(t,u) \cdot u > 0 \qquad \text{para todo } \ t \in [0,1], u \in \partial B_R(0).$$

Probar que el problema de Dirichlet

$$\begin{cases} u''(t) = f(t,u(t)) \\ u(0) = u_0, \quad u(1) = u_1 \end{cases} \tag{1}$$

tiene al menos una solución para todo $u_0, u_1 \in \overline{B}_R(0)$.

5. (*Condición de monotonía*) Sea $f : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de clase C^1 tal que

$$[f(t,u) - f(t,v)] \cdot (u - v) > 0$$

para todo $(t,u), (t,v) \in [0,1] \times \mathbb{R}^2$. Probar que el problema (1) tiene solución única para todo $u_0, u_1 \in \mathbb{R}^2$.

6. Extender los resultados de 4 y 5 para f continua.

2 Operador de Poincaré

1. Sea $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de clase C^1 , T-periódica en t y sublineal en x, es decir:
$$f(t+T,x) = f(t,x) \qquad \text{para todo } (t,x),$$
$$\lim_{\|x\|\to\infty} \frac{f(t,x)}{\|x\|} = 0 \qquad \text{uniformemente en } t.$$
   (a) Probar que el problema
$$x'(t) + x(t) = f(t, x(t))$$
   admite al menos una solución T-periódica.
   (b) Probar que el problema
$$x'(t) - x(t) = f(t, x(t))$$
   admite al menos una solución T-periódica.

2. Sean $f, g : [0,T] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^1 tales que
   (a) $|f(t,x,y)| \leq M$ para $(t,x,y) \in [0,T] \times \mathbb{R}^2$.
   (b) $|g(t,x,y)| \leq C(x)$ para $(t,x,y) \in [0,T]\times\mathbb{R}^2$, con $C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua.
   (c) Existe $R > 0$ tal que
$$f(t,x,y) \geq 0 \geq f(t,-x,y)$$
   para cada (t,x,y) con $x \geq R$, y
$$g(t,x,y) \geq 0 \geq g(t,x,-y)$$
   para cada (t,x,y) con $y \geq R$.

   Probar que el problema
$$\begin{cases} x' = f(t,x(t),y(t)) \\ y' = g(t,x(t),y(t)) \\ x(0) = x(T) \\ y(0) = y(T) \end{cases}$$
   admite al menos una solución.

3. Sea $f : [0,T] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ suave tal que
$$f(t,R,0) > 0 > f(t,-R,0) \qquad 0 \leq t \leq T.$$
   Supongamos además que
$$|f(t,u,v)| \leq A + B|v|^2 \qquad (t,u,v) \in [0,T] \times [-R,R] \times \mathbb{R}.$$

Probar que el problema T-periódico para $u'' = f(t, u(t), u'(t))$ tiene al menos una solución u tal que $u(t) \in [-R, R]$ para todo t.

Sugerencia: probar que existe $M > 0$ tal que si u es una solución tal que $\|u\|_\infty \leq R$, entonces $\|u'\|_\infty \leq M$. Para eso, observar por ejemplo que si $u'(a) = 0$ y $u'(b) = M$ con $u' > 0$ en (a, b) entonces

$$\int_0^M \frac{s}{A + Bs^2}\, ds \leq 2R.$$

4. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ acotada (suave) y p continua de promedio cero en $[0, T]$.

   (a) Probar que existe r tal que si u es solución entonces $\|u - \overline{u}\|_\infty \leq r$.

   (b) Si existen a y b tales que $g < 0$ en $[a-r, a+r]$ y $g > 0$ en $[b-r, b+r]$, entonces el problema periódico tiene solución.

5. Probar el *teorema de Lazer-Leach*: sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y acotada tal que los límites

$$g(\pm\infty) := \lim_{u \to \pm\infty} g(u)$$

existen y sea $p \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ una función 2π-periódica. Supongamos que

$$\sqrt{A^2 + B^2} < 2(g(+\infty) - g(-\infty)).$$

donde

$$A := \int_0^{2\pi} p(t)\cos(t)\, dt, \qquad B := \int_0^{2\pi} p(t)\sin(t)\, dt.$$

Entonces el problema

$$u''(t) + u(t) + g(u(t)) = p(t)$$

tiene al menos una solución 2π-periódica

Sugerencia: suponer primero que g es suave y definir la función

$$F(x, y) := (y - u'_{x,y}(2\pi), u_{x,y}(2\pi) - x)$$

en donde $u_{x,y}$ es la solución de la ecuación con valores iniciales $u_{x,y}(0) = x, u'_{x,y}(0) = y$ Usando coordenadas polares $(x, y) := (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$, probar que si r es grande entonces $F(x, y)\cdot(x, y) > 0$ para $(x, y) \in \partial B_r(0)$.